Limites Laterais

- Vamos estudar agora o conceito de limites laterais, que são limites que existem quando x se aproxima do número "*a*" somente pela esquerda (onde $x < a$) ou pela direita ($x > a$).
- Para se ter um limite L quando x se aproxima de a, uma função f deve ser definida em ambos os lados de a, e seus valores f(x) devem se aproximar de L quando x se aproxima de a de cada lado. Limites comuns são chamados Bilaterais.

Definição

- Seja f uma função definida em um intervalo aberto (a,c). Dizemos que um número L é o ***limite à direita*** da função f quando x tende para a^+ e escrevemos $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, se

  para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $a < x < a + \delta$.
- Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ dizemos que f(x) tende para L quando x tende para a pela direita. Usamos o símbolo $x \to a^+$ para indicar que os valores são sempre maiores do que a.

Definição

- Seja f uma função definida em um intervalo aberto (d,a). Dizemos que um número L é o ***limite à esquerda*** da função f quando x tende para a^- e escrevemos $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $a - \delta < x < a$.
- Se $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ dizemos que f(x) tende para L quando x tende para a pela esquerda. Usamos o símbolo $x \to a^-$ para indicar que os valores são sempre menores do que a .

Exemplo 1

- Dada a função $f(x) = (1 + \sqrt{x - 3}) \in \mathbb{R}$,determine se possível:

a) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

Exemplo 2

- Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-|x|}{x} & \text{, se } x \neq 0 \\ 1 & \text{, se x=0} \end{cases}$. Determinar $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x)$. Esboçar o gráfico.

Exemplo 3

- Seja f(x) = |x|. Determine $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x)$. Esboçar o gráfico.

Teorema

- Se f é definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no ponto a, então $\lim_{x \to a} f(x)$ = L se e somente se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

- Note que o limite pode existir e não necessariamente ser igual ao valor da função no ponto!

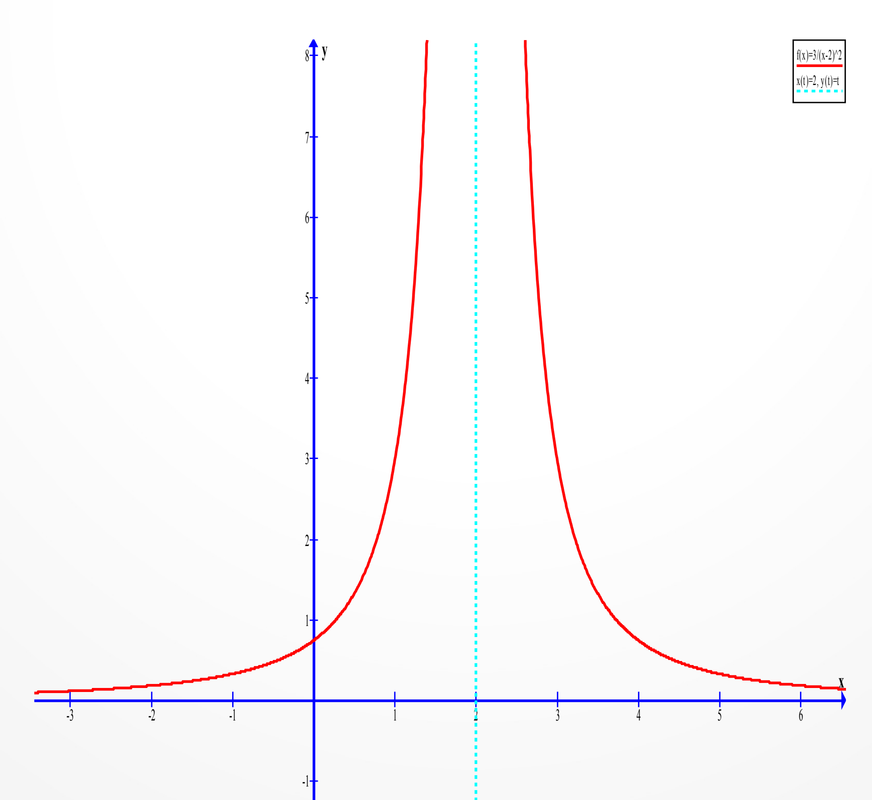
Exemplo 4

- Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{, para } x < 2 \\ 2 & \text{, para } x = 2 \\ 9 - x^2 & \text{, para } x > 2 \end{cases}$. Determinar se existirem, $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 2} f(x)$. Esboçar o gráfico.

Limites infinitos

Noção intuitiva

- Considere a função $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$, o que acontece se x torna-se cada vez mais próximo de 2?



Definições

- Seja uma função definida em todo número de um intervalo aberto I contendo a, exceto, possivelmente, no próprio a. Quando x tende a a, f(x) ***cresce indefinidamente*** e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, se para todo N>0, existir $\delta > 0$, tal que $0 < |x - a| < \delta$, então f(x) > N.

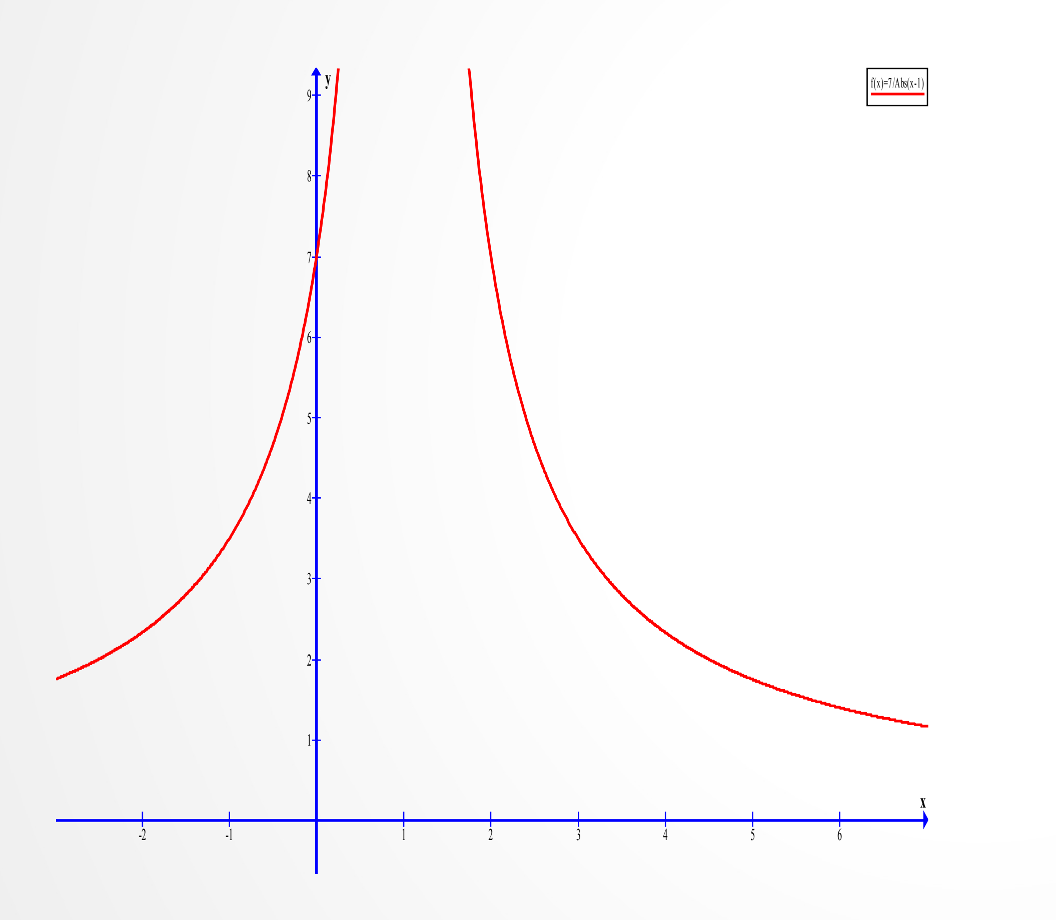
Definições

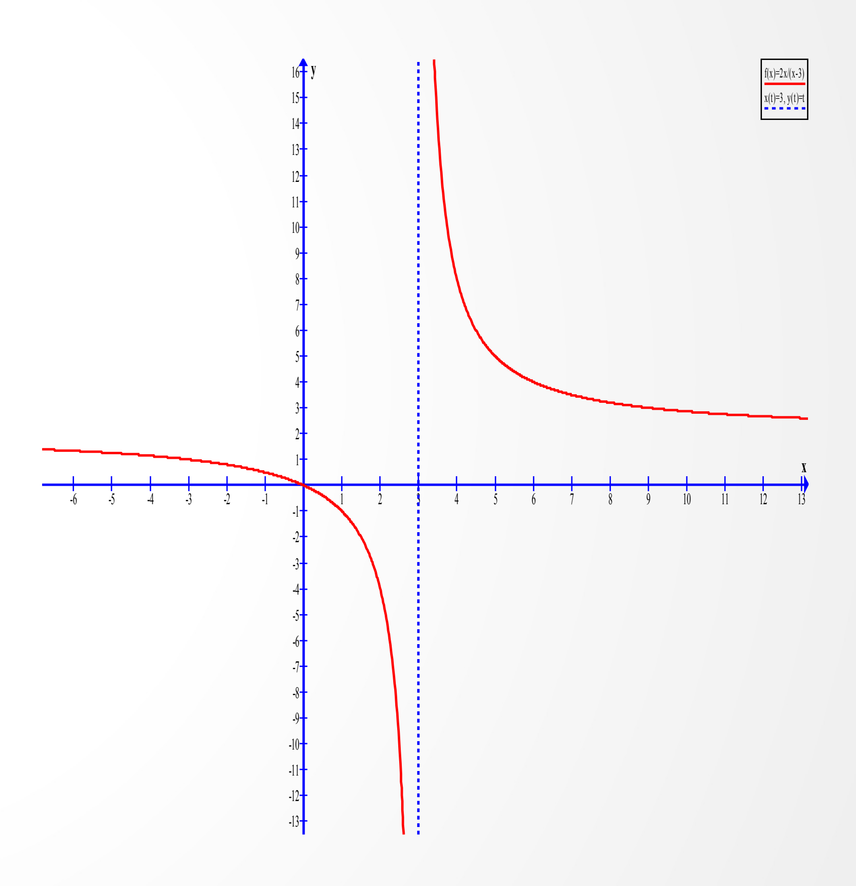
- Seja uma função definida em todo número de um intervalo aberto I contendo a, exceto, possivelmente, no próprio a. Quando x tende a a, f(x) ***decresce indefinidamente*** e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, se para todo N<0, existir $\delta > 0$, tal que $0 < |x - a| < \delta$, então f(x) < N.

Exemplo 5

$$a)\lim_{x \to 1} \frac{7}{|x-1|} =$$

$$b)\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} =$$


f(x)=7/Abs(x-1)
x
y


f(x)=2x/(x-3)
x(t)=3, y(t)=t
x
y

Exercícios

- Determine os limites:

$a) \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$

$b) \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2 - 4}$

$c) \lim_{x \to 2^+} \frac{x - 3}{x^2 - 4}$

$d) \lim_{x \to 2^-} \frac{x - 3}{x^2 - 4}$

$e) \lim_{x \to 2} \frac{x - 3}{x^2 - 4}$

$f) \lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$